NEUE METHODE DER SPHÄRISCHEN NETZAUSGLEICHUNG

UND

DEREN ANWENDUNG AUF DIE BERECHNUNG DER GEOGRAPHISCHEN LAGE

DES

ST. STEPHANSTURMES IN WIEN

VON

S. WELLISCH,
BAUINSPEKTOR DES WIENER STADTBAUAMTES.

Mit 4 Textfiguren.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 26. NOVEMBER 1914.

Die Methode der Netzausgleichung, welche in dem vorliegenden Aufsatze zur Behandlung gelangt, unterscheidet sich von der üblichen Methode im wesentlichen darin, daß an Stelle der Winkelgleichungen eine neue Gattung von Bedingungsgleichungen, die sogenannten Richtungsgleichungen, eingeführt werden. Es sind dies jene Gleichungen, welche zum Ausdrucke bringen, daß nach erfolgter Ausgleichung und Orientierung des Netzes die zugeordneten Richtungen im Hin- und Hergange — gleichwie im ebenen Dreiecksnetze genau auf 180° — im sphärischen Netze auf 180° + Ordinatenkonvergenz stimmen müssen.

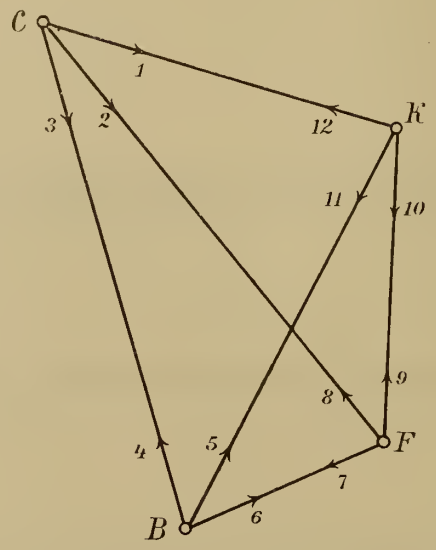
Diese Methode hat durch die Einführung der neuen Bedingung keinesfalls eine Mehrarbeit in der Rechnung zur Folge; im Gegenteile, der Rechnungsgang gestaltet sich wesentlich bequemer und kürzer. Überdies besitzt diese Methode den Vorteil der Unabhängigkeit von der Wahl der beim üblichen Verfahren erforderlichen Winkelgleichungen.

Nachdem wir an anderer Stelle[1] die Netzausgleichung in der Ebene behandelt haben, sei in dem vorliegenden Artikel die Netzausgleichung auf der Sphäre an der Hand eines ausführlichen Zahlen-

[1] »Theorie und Praxis der Ausgleichungsrechnung.« Wien u. Leipzig, 1910, II. Bd., p. 148. »Netzorientierung durch Einführung von Richtungsbedingungsgleichungen« in der »Österr. Zeitschr. f. Vermessungswesen«, 1913, p. 178.

beispieles durchgenommen. Wir wählen hiezu das in Jordan-Eggert's »Handbuch der Vermessungskunde«, 1910, I. Bd., § 66 behandelte, im nebenstehenden Netzbilde (Fig. 1) dargestellte Viereck »Catharina

Fig. 1.



—Belchen—Feldberg—Kandel« der badischen Landestriangulierung, das wir der Vollständigkeit wegen zuerst nach Richtungen, sodann nach Winkeln ausgleichen.

I. Ausgleichung nach Richtungen.

a) Übliche Methode.

Zusammenstellung der beobachteten Richtungen.

Station Catharina.				Station Kandel			
Kandel	(1) =	0° 00'	00"00	Feldberg	(10) =	0° 00'	00"00
Feldberg	(2) =	34 52	27·44	Belchen	(11) =	25 09	09·67
Belchen	(3) =	57 49	20·90	Catharina	(12) =	102 43	24·53

Station Belchen.				Station Feldberg.			
Catharina	(4) =	0° 00'	00"00	Belchen	(7) =	0° 00'	00"00
Kandel	(5) =	44 36	27·07	Catharina	(8) =	72 58	55·84
Feldberg	(6) =	84 04	12·94	Kandel	(9) =	115 23	06·40

Summenproben mit Berücksichtigung der sphärischen Exzesse.

C (1, 3)	= 57°	49'	20"90	C (2, 3)	= 22°	56'	53"46
B (4, 5)	= 44	36	27·07	F (7, 8)	= 72	58	55·84
K (11, 12)	= 77	34	14·86	B (4, 6)	= 84	04	12·94
Summe:	180°	00'	02"83	Summe:	180°	00'	02"24
Soll	180	00	01·83	Soll	180	00	01·22
w	=	+	1"00	w	=	+	1"02

$B\,(5,6)$	$=$	$39°$	$27'$	$45''87$	$F\,(8,9)$	$=$	$42°$	$24'$	$10''56$
$F\,(7,9)$	$=$	115	23	$06\cdot40$	$K\,(10,12)$	$=$	102	43	$24\cdot53$
$K\,(10,11)$	$=$	25	09	$09\cdot67$	$C\,(1,2)$	$=$	34	52	$27\cdot44$
Summe:		$180°$	$00'$	$01''94$	Summe:		$180°$	$00'$	$02''53$
Soll		180	00	$00\cdot67$	Soll		180	00	$01\cdot28$
w	$=$		$+$	$1''27$	w	$=$		$+$	$1''25$

In die Ausgleichung eingeführte Winkelgleichungen.

$$\left.\begin{aligned} v_3 - v_1 + v_5 - v_4 + v_{12} - v_{11} + 1''00 &= 0 \\ v_3 - v_2 + v_8 - v_7 + v_6 - v_4 + 1\cdot02 &= 0 \\ v_9 - v_8 + v_{12} - v_{10} + v_2 - v_1 + 1\cdot25 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (1)$$

Seitengleichung in Einheiten der sechsten Logarithmendezimale.

$$\left.\begin{aligned} -3\cdot02\ v_1 + 8\cdot00\ v_2 - 4\cdot98\ v_3 - 0\cdot22\ v_4 + 2\cdot56\ v_5 - 2\cdot34\ v_6 - 4\cdot97\ v_{10} \\ + 4\cdot49\ v_{11} + 0\cdot48\ v_{12} - 2\cdot90 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (2)$$

Normalgleichungen.

$$\left.\begin{aligned} 155\cdot09\,k_1 - 3\cdot19\,k_2 - 15\cdot10\,k_3 + 16\cdot47\,k_4 - 2\cdot90 &= 0 \\ 6\cdot00 + 2\cdot00 + 2\cdot00 + 1\cdot00 &= 0 \\ 6\cdot00 - 2\cdot00 + 1\cdot02 &= 0 \\ 6\cdot00 + 1\cdot25 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (3)$$

Korrelaten.

$$k_1 = +0\cdot044 \qquad k_2 = +0\cdot078 \qquad k_3 = -0\cdot232 \qquad k_4 = -0\cdot431.$$

Die Richtungsverbesserungen v enthält die Tabelle I in Spalte 2. In der Spalte 3 sind die beobachteten, von Jordan der Ausgleichung zugrunde gelegten Richtungen (1) bis (12) in genäherter Orientierung, wie solche aus Anschlußrechnungen stets gewonnen werden können, aufgeführt. Hierin stimmen die Richtungen (1), (6) und (9) mit ihren Gegenrichtungen (12), (7) und (10) auf 180° vollkommen ziffermäßig überein, weil dies bei der auf drei Stationen willkürlichen Festsetzung der Anfangsrichtung von Jordan so angenommen worden ist. Daß dann nicht auch die übrigen Richtungen, (2) mit (8), (3) mit (4) und (5) mit (11), zusammenstimmen, hat teils in den Beobachtungsfehlern, teils darin seinen Grund, daß das Viereck nicht eben, sondern sphärisch ist. Es muß aber hervorgehoben werden, daß — wie bereits erwähnt — bei sphärischen Netzen die ausgeglichenen und orientierten Richtungen der Dreiecksseiten mit ihren Gegenrichtungen nicht vollkommen auf 180° übereinstimmen dürfen, sondern um 180° + Ordinatenkonvergenz voneinander abweichen müssen, wie ja auch die Winkelsumme in einem sphärischen Dreieck nicht genau 180°, sondern 180° + sphärischen Exzeß betragen muß.

Die Spalte 4 der Tabelle I enthält die von Jordan angegebenen Ausgleichungsergebnisse ohne Wiederholung der Grade und Minuten.

b) Ordinatenkonvergenz.

Der von der Konvergenz der Ordinatenkreise abhängende Unterschied im Richtungswinkel eines Strahles MN und seines Gegenstrahles NM ergibt sich aus der Formel

$$\Delta\alpha_{m,n} = \alpha_{m,n} - \alpha_{n,m} = \frac{\rho}{2r^2}(r_m + r_n)(y_n - y_m),$$

worin y_m, x_m beziehungsweise y_n, x_n die rechtwinkligen sphärischen Koordinaten der Punkte M, N bedeuten und r den mittleren Krümmungshalbmesser darstellt. Da die Ordinatenkonvergenzen der sechs Seiten des Vierecks in der Folge eine wichtige Rolle spielen, sei deren numerische Berechnung hier vorausgeschickt.

Tabelle I.

Richtung Nr.	Verbesserungen v	Beobachtete	Ausgeglichene
		Richtungen ohne Orientierungsanschluß	
1	2	3	4
1	+ 0"221	104° 33' 24"00	24"22
2	+ 0·153	139 25 51·44	51·59
3	− 0·372	162 22 44·90	44·53
4	+ 0·144	342 22 40·13	40·27
5	+ 0·190	26 59 07·20	07·39
6	− 0·335	66 26 53·07	52·74
7	+ 0·232	246 26 53·07	53·30
8	+ 0·199	319 25 48·91	49·11
9	− 0·431	1 49 59·47	59·04
10	+ 0·214	181 49 59·47	59·68
11	+ 0·119	206 59 09·14	09·26
12	− 0·332	284 33 24·00	23·67

Die hiezu erforderlichen Koordinaten der vier Stationen haben wir dem Aufsatze von Jordan: »Ausgleichung eines Triangulierungsnetzes mit Repetitionswinkelmessung« in der »Zeitschrift für Vermessungswesen,« 1878, p. 18 bis 34, entnommen. Die rechtwinkligen sphärischen Koordinaten der vier Punkte nach Angabe der badischen Landestriangulierung, jedoch für die nach Norden gerichtete positive Abszissenachse, sind:

Catharina	$y = -57\ 369{\cdot}38\ m$	$x = -152\ 032{\cdot}10\ m$
Belchen	$-46\ 945{\cdot}31$	$-184\ 849{\cdot}97$
Feldberg	$-34\ 075{\cdot}05$	$-179\ 239{\cdot}32$
Kandel	$-33\ 403{\cdot}83$	$-158\ 255{\cdot}28$

Zur Berechnung der Ordinatenkonvergenzen genügen aber genäherte Koordinaten. Für die geographische Breite von 48° ist

$$\log r = 6{\cdot}80479, \qquad \log \frac{\rho}{2r^2} = 1{\cdot}40382 - 10.$$

Damit erhält man für die Ordinatenkonvergenzen die Werte:

Von C nach K	$\Delta\alpha_{1.12} = +\ 1"43$
» C » F	$\Delta\alpha_{2.8} = +\ 6{\cdot}30$
» C » B	$\Delta\alpha_{3.1} = +\ 8{\cdot}67$
» K » F	$\Delta\alpha_{10.9} = +\ 3{\cdot}59$
» K » B	$\Delta\alpha_{11.5} = +\ 5{\cdot}41$
» F » B	$\Delta\alpha_{7.6} = +\ 1{\cdot}15.$

Bildet man für jedes einzelne Dreieck mit Berücksichtigung des Vorzeichens die Summen der Ordinatenkonvergenzen der drei Dreiecksseiten, so erhält man die sphärischen Exzesse der betreffenden Dreiecke, was als Rechenprobe dienen kann, denn es ist allgemein

$$\Delta\alpha_{1,2} = \frac{\rho}{2r^2}(y_1+y_2)(x_2-x_1)$$

$$\Delta\alpha_{2,3} = \frac{\rho}{2r^2}(y_2+y_3)(x_3-x_2)$$

$$\Delta\alpha_{3,1} = \frac{\rho}{2r^2}(y_3+y_1)(x_1-x_3)$$

$$[\Delta\alpha] = \frac{\rho}{2r^2}\,.2f = \rho\,\frac{f}{r^2} = \varepsilon,$$

und man erhält mit den aus der Dreiecksfläche f nach der Formel $\varepsilon = \rho\,\frac{f}{r^2}$ direkt berechneten, in der Zusammenstellung der Summenproben bereits ausgewiesenen sphärischen Exzessen vollkommen übereinstimmend die speziellen Werte:

Dreieck C—B—K . . . . . $+8\cdot67-5\cdot41-1\cdot43 = 1''83$
» C—F—B . . . . . $+8\cdot67-1\cdot15-6\cdot30 = 1\cdot22$
» B—F—K . . . . . $+5\cdot41-1\cdot15-3\cdot59 = 0\cdot67$
» F—K—C . . . . . $+6\cdot30-1\cdot43-3\cdot59 = 1\cdot28.$

Die in der Spalte 4 der Tabelle I ausgeglichenen Richtungen Jordan's erfüllen wohl die Seitengleichung und alle Winkelgleichungen, aber sie stimmen mit ihren Gegenrichtungen nicht sofort auf $180° + \Delta\alpha$ überein. Um dies zu erreichen, wurden in der Spalte 3 der Tabelle II die nach Jordan ausgeglichenen Richtungen an die Richtungen der Station C unter Belassung der Differenzen $180° + \Delta\alpha$ angeschlossen, indem die drei Richtungen (1), (2) und (3) der ersten Station C, welche von den vier

Tabelle II.

Richtung Nr.	Beobachtete	Ausgeglichene	Die um v verbesserten Richtungen der Spalte 2
	Richtungen mit Orientierungsanschluß		
1	2	3	4
1	104° 33′ 24″00	24″22	24″22
2	139 25 51·44	51·59	51·59
3	162 22 44·90	44·53	44·53
4	342 22 36·23	35·86	36·37
5	26 59 03·30	02·98	03·49
6	66 26 49·17	48·33	48·84
7	246 26 49·30	49·48	49·53
8	319 25 45·14	45·29	45·34
9	1 49 55·70	55·22	55·27
10	181 49 58·04	58·80	58·25
11	206 59 07·71	08·38	07·83
12	284 33 22·57	22·79	22·24

Richtungssätzen als die am besten orientierten angenommen seien, unverändert gelassen, die zugehörigen Gegenrichtungen (12), (8) und (4), wovon je eine den drei anderen Stationen angehört, auf $180° + \Delta\alpha$ abgestimmt und die übrigen Richtungen je eines Satzes an die derart endgültig orientierten Strahlen der betreffenden Beobachtungsstationen ohne Veränderung der Winkel angeschlossen wurden, wodurch der zweite Satz um die Ordinatenkonvergenz $\Delta\alpha_{4.3} = -8''67$, der dritte Satz um $\Delta\alpha_{8.2} = -6''30$ und der vierte Satz um $\Delta\alpha_{12.1} = -1''43$ gegenüber dem ersten Satz gedreht erscheint.

Fügt man die Jordan'schen Verbesserungen v an die »beobachteten Richtungen mit Orientierungsanschluß« (Spalte 2 der Tabelle II), die in ähnlicher Weise orientiert wurden wie die Werte der Spalte 3, so erhält man die Ergebnisse der Spalte 4, die aber (von den drei Richtungen der ersten Station abgesehen) mit den »ausgeglichenen Richtungen mit Orientierungsanschluß« (Spalte 3) selbstverständlich erst dann übereinstimmen können, wenn sie abermals auf $180° + \Delta\alpha$ abgestimmt werden.

c) Neue Methode.

Bei dieser Ausgleichungsmethode wird der Orientierungsanschluß mit Vorteil gleich an den beobachteten Richtungen vorgenommen. In den Spalten 2 und 3 der Tabelle III erscheinen die beobachteten Richtungen und die unter dem erwähnten Gesichtspunkte vorläufig orientierten Richtungen der leichteren Übersichtlichkeit wegen nochmals angeschrieben (vergl. Spalte 3 der Tabelle I und Spalte 2 der Tabelle II).

Tabelle III.

Richtung Nr.	Beobachtete Richtungen ohne Orientierungsanschluß	Beobachtete Richtungen mit Orientierungsanschluß	Unterschiede der gegenseitigen Richtungen $\Delta\alpha$	Ordinaten-Konvergenzen $\Delta\alpha$	Differenzen (sollen gleich Null sein) $\Delta\alpha - \Delta\alpha$
1	2	3	4	5	6
1	104° 33′ 24″00	24″00	+ 1″43	+ 1″43	0
2	139 25 51·44	51·44	+ 6·30	+ 6·30	0
3	162 22 44·90	44·90	+ 8·67	+ 8·67	0
4	342 22 40·13	36·23	− 8·67	− 8·67	0
5	26 59 07·20	03·30	− 4·41	− 5·41	− 1″00
6	66 26 53·07	49·17	− 0·13	− 1·15	− 1·02
7	246 26 53·07	49·30	+ 0·13	+ 1·15	+ 1·02
8	319 25 48·91	45·14	− 6·30	− 6·30	0
9	1 49 59·47	55·70	− 2·34	− 3·59	− 1·25
10	181 49 59·47	58·04	+ 2·34	+ 3·59	+ 1·25
11	206 59 09·14	07·71	+ 4·41	+ 5·41	+ 1·00
12	284 33 24·00	22·57	− 1·43	− 1·43	0

In der Spalte 4 sind die Richtungsunterschiede der Werte von Spalte 3 mit Weglassung von 180° in dem Sinne

$$\Delta\alpha_{m.n} = \alpha_{m.n} - \alpha_{n.m},$$

in der Spalte 5 die Ordinatenkonvergenzen $\Delta\alpha_{m.n}$ und in der Spalte 6 die Differenzen $\Delta\alpha - \Delta\alpha$, welche nach der Ausgleichung Null sein müssen, ausgewiesen, wobei zu beachten ist, daß in den drei letzten Spalten die zu den Richtungen im Hingange gehörigen Werte jenen im Rückgange dem absoluten Betrage nach gleich, ihrem Vorzeichen nach aber entgegengesetzt sein müssen.

Nach unserer Ausgleichungsmethode benötigt man als Bedingungsgleichungen sechs Richtungsgleichungen, welche an die Stelle der drei Winkelgleichungen zu treten haben, und eine Seitengleichung. Die Richtungsgleichungen werden wie folgt erhalten. Es bestehen zwischen der ausgeglichenen Richtung $[\alpha_{m.n}]$ von M nach N und ihrer Gegenrichtung $[\alpha_{n.m}]$ von N nach M, sowie zwischen der gemessenen Richtung $(\alpha_{m.n})$ von M nach N und ihrer Gegenrichtung $(\alpha_{n.m})$ von N nach M, deren Verbesserungen zur Unterscheidung von den bisherigen v mit $\mathfrak{v}_m$ und $\mathfrak{v}_n$ bezeichnet werden mögen, die Gleichungen

$$[\alpha_{n.m}] - [\alpha_{m.n}] = 180° + \Delta\mathfrak{a}_{n.m} = 180° - \Delta\mathfrak{a}_{m.n}$$

$$(\alpha_{n.m}) + \mathfrak{v}_n - (\alpha_{m.n}) - \mathfrak{v}_m = 180° - \Delta\mathfrak{a}_{m.n}.$$

Da aber

$$(\alpha_{n.m}) - (\alpha_{m.n}) = 180° + \Delta\alpha_{n.m} = 180° - \Delta\alpha_{m.n},$$

so besteht die Bedingungsgleichung

$$\mathfrak{v}_n - \mathfrak{v}_m = \Delta\alpha_{m.n} - \Delta\mathfrak{a}_{m.n}$$

oder

$$\mathfrak{v}_m - \mathfrak{v}_n - (\Delta\mathfrak{a}_{m.n} - \Delta\alpha_{m.n}) = 0.$$

Nach dieser Anleitung erhält man mit Benützung der Werte aus der Spalte 6 der Tabelle III die sechs Richtungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_{12} &= 0 \\ \mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_8 &= 0 \\ \mathfrak{v}_3 - \mathfrak{v}_4 &= 0 \\ \mathfrak{v}_5 - \mathfrak{v}_{11} + 1{\cdot}00 &= 0 \\ \mathfrak{v}_6 - \mathfrak{v}_7 + 1{\cdot}02 &= 0 \\ \mathfrak{v}_9 - \mathfrak{v}_{10} + 1{\cdot}25 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (4).$$

Die in den drei letzten Gleichungen auftretenden Absolutglieder sind jenen der drei Winkelgleichungen (1) der üblichen Methode gleich.

Der Umstand, daß die sechs Richtungsgleichungen der neuen Methode immer nur je zwei Unbekannte, die drei Winkelgleichungen der üblichen Methode aber je sechs Unbekannte enthalten, bewirkt es, daß die ganze Rechnung nach der neuen Methode wesentlich bequemer und einfacher sich gestaltet. Eine weitere Vereinfachung bringt die Seitengleichung mit sich. Es kann zwar die bei der üblichen Methode verwendete Seitengleichung direkt benützt werden, empfehlenswert erscheint es jedoch, diese Seitengleichung umzuformen.

Die übliche Seitengleichung (2) enthält 9 unbekannte Verbesserungen. Hievon sind aber 3 Verbesserungen von den anderen abhängig, was aus den Richtungsbedingungsgleichungen (4) hervorgeht. Man kann daher die Anzahl der Unbekannten in der Seitengleichung sozusagen mit einem Federstrich von 9 auf 6 vermindern. Setzt man nämlich in der Seitengleichung (2)

$$\begin{aligned} -3{\cdot}02\,\mathfrak{v}_1 + 8{\cdot}00\,\mathfrak{v}_2 - 4{\cdot}98\,\mathfrak{v}_3 - 0{\cdot}22\,\mathfrak{v}_4 + 2{\cdot}56\,\mathfrak{v}_5 - 2{\cdot}34\,\mathfrak{v}_6 - 4{\cdot}97\,\mathfrak{v}_{10} \\ + 4{\cdot}49\,\mathfrak{v}_{11} + 0{\cdot}48\,\mathfrak{v}_{12} - 2{\cdot}90 = 0 \end{aligned}$$

in Entsprechung der Richtungsgleichungen:

$$\mathfrak{v}_3 \text{ statt } \mathfrak{v}_4, \quad \mathfrak{v}_1 \text{ statt } \mathfrak{v}_{12} \text{ und } \mathfrak{v}_5 + 1{\cdot}00 \text{ statt } \mathfrak{v}_{11},$$

so erhält man die verkürzte Seitengleichung

$$-2{\cdot}54\,\mathfrak{v}_1 + 8{\cdot}00\,\mathfrak{v}_2 - 5{\cdot}20\,\mathfrak{v}_3 + 7{\cdot}05\,\mathfrak{v}_5 - 2{\cdot}34\,\mathfrak{v}_6 - 4{\cdot}97\,\mathfrak{v}_{10} + 1{\cdot}59 = 0, \quad \ldots (5)$$

welche nur noch 6 unbekannte Verbesserungen enthält. Die Rechnung mit den sechs Richtungsgleichungen und der verkürzten Seitengleichung nimmt nun folgenden Verlauf:

Koeffizienten der Bedingungsgleichungen.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	w
+ 1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	− 1	0
.	+ 1	.	.	.	.	.	− 1	.	.	.	.	0
.	.	+ 1	− 1	.	.	.	.	.	.	.	.	0
.	.	.	.	+ 1	.	.	.	.	.	− 1	.	+1·00
.	.	.	.	.	+ 1	− 1	.	.	.	.	.	+1·02
.	.	.	.	.	.	.	.	+ 1	− 1	.	.	+1·25
− 2·54	+ 8·00	− 5·20	.	+ 7·05	− 2·34	.	.	.	− 4·97	.	.	+1·59

Bildung der Summenkoeffizienten.

$$[aa] = [bb] = [cc] = [dd] = [ee] = [ff] = 2,$$

$$[ag] = -2{\cdot}54,\ [bg] = +8{\cdot}00,\ [cg] = -5{\cdot}20,\ [dg] = +7{\cdot}05,\ [eg] = -2{\cdot}34,$$

$$[fg] = +4{\cdot}97,\ [gg] = +177{\cdot}37.$$

Normalgleichungen.

$$\left.\begin{aligned}
2{\cdot}00\,\mathfrak{f}_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 2{\cdot}54\,\mathfrak{f}_7 \ldots &= 0\\
2{\cdot}00\,\mathfrak{f}_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 8{\cdot}00\,\mathfrak{f}_7 \ldots &= 0\\
2{\cdot}00\,\mathfrak{f}_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 5{\cdot}20\,\mathfrak{f}_7 \ldots &= 0\\
2{\cdot}00\,\mathfrak{f}_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 7{\cdot}05\,\mathfrak{f}_7 + 1{\cdot}00 &= 0\\
2{\cdot}00\,\mathfrak{f}_5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 2{\cdot}34\,\mathfrak{f}_7 + 1{\cdot}02 &= 0\\
2{\cdot}00\,\mathfrak{f}_6 + 4{\cdot}97\,\mathfrak{f}_7 + 1{\cdot}25 &= 0\\
+177{\cdot}37\,\mathfrak{f}_7 + 1{\cdot}59 &= 0
\end{aligned}\right\} \ldots (6)$$

Hieraus werden die Korrelaten sehr einfach dadurch erhalten (und darin besteht die wesentlichste Erleichterung), daß die aus den sechs ersten Normalgleichungen resultierenden, sofort anschreibbaren Ansätze

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{f}_1 &= +1{\cdot}270\ \mathfrak{f}_7\\
\mathfrak{f}_2 &= -4{\cdot}000\ \mathfrak{f}_7\\
\mathfrak{f}_3 &= +2{\cdot}600\ \mathfrak{f}_7\\
\mathfrak{f}_4 &= -3{\cdot}525\ \mathfrak{f}_7 - 0{\cdot}500\\
\mathfrak{f}_5 &= +1{\cdot}170\ \mathfrak{f}_7 - 0{\cdot}510\\
\mathfrak{f}_6 &= -2{\cdot}485\ \mathfrak{f}_7 - 0{\cdot}625,
\end{aligned}\right\} \ldots (7)$$

in die letzte Normalgleichung eingesetzt, eine Gleichung mit der einzigen Unbekannten $\mathfrak{f}_7$ ergibt, die sohin leicht ermittelt werden kann. Ist aber $\mathfrak{f}_7$ einmal bekannt, so werden die übrigen Korrelaten aus den obigen sechs Ansätzen (7) durch einfache Substitution erhalten. Die Auflösung der Normalgleichungen, bekanntlich die umständlichste und zeitraubendste Arbeit der ganzen Ausgleichung, bereitet sohin nach der neuen Methode keine Schwierigkeiten. Die Rechnung liefert zunächst aus

$$88{\cdot}6853\,\mathfrak{f}_7 - 3{\cdot}8478 = 0, \qquad \mathfrak{f}_7 = 0{\cdot}043387$$

die Korrelaten:

$$f_1 = +0{\cdot}055, \quad f_2 = -0{\cdot}174, \quad f_3 = +0{\cdot}113, \quad f_4 = -0{\cdot}653, \quad f_5 = -0{\cdot}459, \quad f_6 = -0{\cdot}733,$$
$$f_7 = +0{\cdot}043,$$

sodann die in der Tabelle IV, Spalte 3 eingetragenen Verbesserungen v, welche, an die »beobachteten Richtungen mit Orientierungsanschluß« (Spalte 3 der Tabelle III oder Spalte 2 der Tabelle IV) angefügt, die in der Spalte 4 ausgewiesenen ausgeglichenen Richtungen ergeben.

Tabelle IV.

Richtung Nr.	Beobachtete Richtungen	Verbesserungen v	Ausgeglichene Richtungen	Unterschiede $v-v$
1	2	3	4	5
1	104° 33' 24"00	− 0"055	104° 33' 23"94	+ 0"28
2	139 25 51·44	+ 0·173	139 25 51·61	− 0·02
3	162 22 44·90	− 0·113	162 22 44·79	− 0·26
4	342 22 36·23	− 0·113	342 22 36·12	+ 0·26
5	26 59 03·30	− 0·347	26 59 02·95	+ 0·54
6	66 26 49·17	− 0·561	66 26 48·61	+ 0·23
7	246 26 49·30	+ 0·459	246 26 49·76	− 0·23
8	319 25 45·14	+ 0·174	319 25 45·31	+ 0·02
9	1 49 55·70	− 0·733	1 49 54·97	+ 0·30
10	181 49 58·04	+ 0·517	181 49 58·56	− 0·30
11	206 59 07·71	+ 0·653	206 59 08·36	− 0·53
12	284 33 22·57	− 0·055	284 33 22·51	− 0·28

Die ausgeglichenen Richtungen in der Spalte 4 erfüllen die Winkelgleichungen und die Seitengleichung und sind auch sofort richtig orientiert, indem alle sechs Richtungspaare auf 180° + Ordinatenkonvergenz vollkommen übereinstimmen. Die Rechenprobe ergibt:

Prüfung der Winkelgleichungen.

$C[1, 3]$	=	57° 49'	20"85	$C[2, 3]$	=	22° 56'	53"18
$B[4, 6]$	=	44 36	26·83	$F[7, 8]$	=	72 58	55·55
$K[11, 12]$	=	77 34	14·15	$B[4, 6]$	=	84 04	12·49
Summe . .		180° 00'	01"83	Summe . .		180° 00'	01"22
$B[5, 6]$	=	39° 27'	45"66	$F[8, 9]$	=	12° 24'	09"66
$F[7, 9]$	=	115 23	05·21	$K[10, 12]$	=	102 43	23·95
$K[10, 11]$	=	25 09	09·80	$C[1, 2]$	=	34 52	27·67
Summe . .		180° 00'	00"67	Summe . .		180° 00'	01"28

Prüfung der Seitengleichung

log sin [1, 2]	= 9·7572 280	log sin [2, 3]	= 9·5909 501
log sin [4, 6]	= 9·9976 699	log sin [5, 6]	= 9·8031 672
log sin [10, 11]	= 9·6284 222	log sin [10, 12]	= 9·9892 028
	9·3833 201		9·3833 201

Prüfung der Richtungsgleichungen.

$$[12]-[1] = 180° - 1''43 \qquad [11]-[5] = 180° + 5''41$$
$$[8] \ -[2] = 180 \ - 6\cdot30 \qquad [7] \ -[6] = 180 \ + 1\cdot15$$
$$[4] \ -[3] = 180 \ - 8\cdot67 \qquad [10]-[9] = 180 \ + 3\cdot59.$$

Es ist der mittlere Fehler einer beobachteten Richtung nach der üblichen Methode

$$\sqrt{\frac{[vv]}{4}} = \sqrt{\frac{0\cdot8176}{4}} = \pm 0''45$$

nach der neuen Methode

$$\sqrt{\frac{[vv]}{7}} = \sqrt{\frac{1\cdot9686}{7}} = \pm 0''53.$$

Die nach beiden Methoden ausgeglichenen Winkel und deren Verbesserungen enthält die Tabelle V.

Tabelle V.

Winkel-bezeichnung	Beobachtete Winkel	Verbesserungen nach der		Ausgeglichene Winkel nach der	
		üblichen	neuen	üblichen	neuen
		Methode		Methode	
1	2	3	4	5	6
1, 2	34° 52' 27''44	− 0''07	+ 0''23	27''37	27''67
2, 3	22 56 53·46	− 0·52	− 0·28	52·94	53·18
4, 5	44 36 27·07	+ 0·05	− 0·24	27·12	26·83
5, 6	39 27 45·87	− 0·52	− 0·21	45·35	45·66
7, 8	72 58 55·84	− 0·03	− 0·29	55·81	55·55
8, 9	42 24 10·56	− 0·63	− 0·90	09·93	09·66
10, 11	25 09 09·67	− 0·09	+ 0·13	09·58	09·80
11, 12	77 34 14·86	− 0·45	− 0·71	14·41	14·15

Rechnet man mit den ausgeglichenen Winkeln unter Benützung des Legendre'schen Satzes alle Dreiecksseiten, so erhält man bei Zugrundelegung der Basis Catharina—Belchen = 34432·57 *m* folgende Ergebnisse, welchen des Vergleiches halber die in Jordan-Eggert's Handbuch, I. Bd., p. 114 angegebenen Resultate gegenübergestellt seien.

Tabelle VI.

Dreiecksseite	Länge der Seiten nach der		Differenz in Metern
	üblichen	neuen	
	Methode		
Catharina—Belchen . . .	34432·57	34432·57	0
Catharina—Feldberg . .	35816·62	35816·63	+ 0·01
Catharina—Kandel . . .	24760·43	24760·40	− 0·03
Belchen—Feldberg . . .	14039·83	14039·87	+ 0·04
Belchen—Kandel	29843·17	29843·23	+ 0·06
Feldberg—Kandel	20994·59	20994·64	+ 0·05

II. Ausgleichung nach Winkeln.

a) Ohne Orientierungswinkel.

Nachdem die Ausgleichung nach Richtungen sowohl mit Winkelgleichungen als auch mit Richtungsgleichungen erledigt ist, sei nunmehr die Ausgleichung nach Winkeln behandelt, die bekanntlich ohne Orientierungswinkel oder mit Orientierungswinkeln durchgeführt werden kann. Bei der »Ausgleichung nach Winkeln ohne Orientierungswinkel« erhält man nur Winkelverbesserungen, aber keine Richtungsverbesserungen, so daß eine Orientierungsausgleichung nicht vorgenommen werden kann.

Nach dieser Methode bestehen, wenn man zum Unterschiede von den Richtungsverbesserungen v die Winkelverbesserungen mit δ bezeichnet, in unserem Viereckbeispiele folgende Bedingungsgleichungen

Winkelgleichungen.

$$\begin{aligned}
\delta_{1.2}+\delta_{2.3}+\delta_{4.5} \quad &+\delta_{11.12}+1{\cdot}00 = 0\\
\delta_{2.3}+\delta_{4.5}+\delta_{5.6} \quad &+\delta_{7.8} \quad +1{\cdot}02 = 0\\
\delta_{1.2}+\delta_{8.9}+\delta_{10.11}&+\delta_{11.12}+1{\cdot}25 = 0.
\end{aligned}$$

Seitengleichung.

$$3{\cdot}02\,\delta_{1.2}-4{\cdot}98\,\delta_{2.3}+0{\cdot}22\,\delta_{4.5}-2{\cdot}34\,\delta_{5.6}+4{\cdot}97\,\delta_{10.11}+0{\cdot}48\,\delta_{11.12}-2{\cdot}90 = 0.$$

Aus den Normalgleichungen

$$\begin{aligned}
4\,k_1+2\,k_2+2\,k_3-\ &1{\cdot}26\,k_4+1{\cdot}00 = 0\\
4\ .\ .\ .\ -\ &7{\cdot}10\ .\ +1{\cdot}02 = 0\\
4\ .\ +\ &8{\cdot}47\ .\ +1{\cdot}25 = 0\\
&+64{\cdot}38\ .\ -2{\cdot}90 = 0
\end{aligned}$$

erhält man die Korrelaten

$$k_1 = +0{\cdot}204, \qquad k_2 = -0{\cdot}107, \qquad k_3 = -0{\cdot}713, \qquad k_4 = +0{\cdot}141$$

und schließlich die in der Spalte 4 der Tabelle VII zusammengestellten Ergebnisse.

Tabelle VII.

Winkelbezeichnung	Winkelverbesserungen δ	Beobachtete Winkel	Ausgeglichene Winkel	
			ohne	mit
			Orientierungswinkel	
1	2	3	4	5
1, 2	— 0″08	34° 52′ 27″44	27″36	27″38
2, 3	— 0·61	22 56 53·46	52·85	53·13
4, 5	+ 0·13	44 36 27·07	27·20	26·95
5, 6	— 0·44	39 27 45·87	45·43	45·30
7, 8	— 0·11	72 58 55·84	55·73	55·84
8, 9	— 0·71	42 24 10·56	09·85	09·80
10, 11	— 0·01	25 09 09·67	09·66	09·74
11, 12	— 0·44	77 34 14·86	14·42	14·36

b) Mit Orientierungswinkeln.

Nach der Methode der Winkelausgleichung mit Orientierungswinkeln, bei welcher neben Winkel- auch Richtungsverbesserungen erhalten werden und daher auch eine Orientierungsausgleichung vorgenommen werden kann, hat man nach dem Vorgange von Bessel in jeder Beobachtungsstation einen Orientierungs- oder Richtungswinkel z einzuführen, das ist jener Winkel, den die als positive Richtung der Abszissenachse genommene Nullrichtung mit der als Anfangsstrahl gewählten Richtung des Satzes nach dessen Ausgleichung einschließt.

In unserem Viereckbeispiele seien die Winkel, welche die Richtungen Nr. 1, 4, 7 und 10 mit der Nullrichtung nach der Ausgleichung bilden, mit z_1, z_4, z_7, z_{10} bezeichnet, so daß — da die Nullrichtung selbst keine Verbesserung erhält — die Gleichungen bestehen (vgl. Fig. 2, p. 15 [45]:

$$\begin{aligned}(1)\ &+v_1 = z_1\\(4)\ &+v_4 = z_4\\(7)\ &+v_7 = z_7\\(10)&+v_{10} = z_{10}.\end{aligned}$$

Die voneinander unabhängigen Bedingungsgleichungen sind dann:

$$\begin{aligned}
&z_1 - z_{10} - [10,12] && +180° - \Delta\alpha_{1,12} = 0\\
&z_1 - z_7 - [7,8] + [1,2] && +180° - \Delta\alpha_{2,8} = 0\\
&z_1 - z_4 + [1,3] && +180° - \Delta\alpha_{3,4} = 0\\
&z_4 - z_{10} - [10,11] + [4,5] && -180° - \Delta\alpha_{5,11} = 0\\
&z_4 - z_7 + [4,6] && -180° - \Delta\alpha_{6,7} = 0\\
&z_7 - z_{10} + [7,9] && -180° - \Delta\alpha_{9,10} = 0
\end{aligned}$$

Infolge der Beobachtungsfehler werden anstatt diesen Winkelbedingungsgleichungen folgende Widerspruchsgleichungen bestehen:

$$\begin{aligned}
&(1)-(10)-(10,12) && +180° - \Delta\alpha_{1,12} = 0\\
&(1)-(7)-(7,8)+(1,2) && +180° - \Delta\alpha_{2,8} = 0\\
&(1)-(4)+(1,3) && +180° - \Delta\alpha_{3,4} = 0\\
&(4)-(10)-(10,11)+(4,5) && -180° - \Delta\alpha_{5,11} = 0\\
&(4)-(7)+(4,6) && -180° - \Delta\alpha_{6,7} = 0\\
&(7)-(10)+(7,9) && -180° - \Delta\alpha_{9,10} = 0
\end{aligned}$$

Hieraus resultieren die Verbesserungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
&v_1 - v_{10} - \delta_{10,12} && -(\Delta\alpha_{1,12} - \Delta\alpha_{1,12}) = 0\\
&v_1 - v_7 - \delta_{7,8} + \delta_{1,2} && -(\Delta\alpha_{2,8} - \Delta\alpha_{2,8}) = 0\\
&v_1 - v_4 + \delta_{1,3} && -(\Delta\alpha_{3,4} - \Delta\alpha_{3,4}) = 0\\
&v_4 - v_{10} - \delta_{10,11} + \delta_{4,5} && -(\Delta\alpha_{5,11} - \Delta\alpha_{5,11}) = 0\\
&v_4 - v_7 + \delta_{4,6} && -(\Delta\alpha_{6,7} - \Delta\alpha_{6,7}) = 0\\
&v_7 - v_{10} + \delta_{7,9} && -(\Delta\alpha_{9,10} - \Delta\alpha_{9,10}) = 0
\end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf die besonderen Werte der Spalte 6 der Tabelle III:

$$\left.\begin{array}{rl} v_1 - v_{10} - \delta_{10,12} & = 0 \\ v_1 - v_7 - \delta_{7,8} + \delta_{1,2} & = 0 \\ v_1 - v_4 + \delta_{1,3} & = 0 \\ v_4 - v_{10} - \delta_{10,11} + \delta_{4,5} + 1{\cdot}00 & = 0 \\ v_4 - v_7 + \delta_{4,6} + 1{\cdot}02 & = 0 \\ v_7 - v_{10} + \delta_{7,9} + 1{\cdot}25 & = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots (8)$$

Zu diesen sechs Winkelgleichungen tritt noch die Seitengleichung

$$\frac{\sin(1,2)\sin(4,6)\sin(10,11)}{\sin(2,3)\sin(5,6)\sin(10,12)} = 1,$$

deren lineare Form:

$$3{\cdot}02\,\delta_{1,2} + 0{\cdot}22\,\delta_{4,6} + 4{\cdot}49\,\delta_{10,11} - 4{\cdot}98\,\delta_{2,3} - 2{\cdot}56\,\delta_{5,6} + 0{\cdot}48\,\delta_{10,12} - 2{\cdot}90 = 0$$

durch Substitution von

$$\delta_{2,3} = \delta_{1,3} - \delta_{1,2} \text{ und } \delta_{5,6} = \delta_{4,6} - \delta_{4,5}$$

die Gestalt annimmt:

$$8{\cdot}00\,\delta_{1,2} - 4{\cdot}98\,\delta_{1,3} + 2{\cdot}56\,\delta_{4,5} - 2{\cdot}34\,\delta_{4,6} + 4{\cdot}49\,\delta_{10,11} + 0{\cdot}48\,\delta_{10,12} - 2{\cdot}90 = 0 \quad \ldots (9)$$

Mit den sieben Bedingungsgleichungen (8) und (9) erhält man direkt die darin auftretenden 8 Winkelverbesserungen und 4 Richtungsverbesserungen und indirekt die übrigen 8 Richtungsverbesserungen aus der allgemeinen Beziehung $v_n = v_m + \delta_{m,n}$ wie folgt:

Normalgleichungen.

$$\begin{array}{rl} 3k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \ldots + k_6 - 0{\cdot}48\,k_7 & = 0 \\ 4k_2 + k_3 \ldots + k_5 - k_6 + 8{\cdot}00\,k_7 & = 0 \\ 4\,k_3 - k_4 - k_5 \ldots - 4{\cdot}98\,k_7 & = 0 \\ 4\,k_4 + k_5 + k_6 - 1{\cdot}93\,k_7 + 1{\cdot}00 & = 0 \\ 4\,k_5 - k_6 - 2{\cdot}34\,k_7 + 1{\cdot}02 & = 0 \\ 4k_6 \quad \ldots\ldots\ldots + 1{\cdot}25 & = 0 \\ 121{\cdot}22\,k_7 - 2{\cdot}90 & = 0 \end{array}$$

Korrelaten:

$$k_1 = +0{\cdot}427, \quad k_2 = -0{\cdot}002, \quad k_3 = -0{\cdot}421, \quad k_4 = -0{\cdot}098, \quad k_5 = -0{\cdot}706, \quad k_6 = -0{\cdot}762,$$
$$k_7 = -0{\cdot}007.$$

Die ausgeglichenen Winkel enthält die Tabelle VII in Spalte 5, die ausgeglichenen Richtungen die Tabelle VIII.

Die nach dieser Methode ausgeglichenen Richtungen (der Tabelle VIII) weichen von den nach der neuen Methode erhaltenen (der Tabelle IV) nicht unwesentlich ab, was durch Vergleichung der bezüglichen Verbesserungen V (in Tabelle VIII) mit v (in Tabelle IV) deutlich zu erkennen ist. Zwischen beiden Methoden der Orientierungsausgleichung besteht jedoch eine Beziehung. Setzt man nämlich in die Gleichungen (8) an Stelle der Winkelverbesserungen die Richtungsverbesserungen nach der allgemeinen Relation

$$\delta_{m,n} = v_n - v_m$$

und in die Gleichung (9) außerdem in Entsprechung der Richtungsgleichungen (wie im Kapitel I. *c*)

$$v_3 \text{ statt } v_4, \quad v_1 \text{ statt } v_{12} \text{ und } v_5 + 1 \cdot 00 \text{ statt } v_{11},$$

so erhält man das System der Richtungsgleichungen (4) und die verkürzte Seitengleichung (5). Es geht zum Beispiel die erste Gleichung der Gruppe (8)

$$v_1 - v_{10} - \delta_{10,\,12} = 0$$

durch Substitution von

$$\delta_{10,\,12} = v_{12} - v_{10}$$

über in

$$v_1 - v_{10} - v_{12} + v_{10} = 0$$

oder

$$v_1 - v_{12} = 0,$$

welche mit der ersten Richtungsgleichung des Systems (4) identisch ist.

Tabelle VIII.

Richtung Nr.	Verbesserungen V	Beobachtete Richtungen	Ausgeglichene Richtungen
1	0″	104° 33′ 24″00	24″00
2	— 0·05	139 25 51·44	51·39
3	— 0·38	162 22 44·90	44·52
4	— 0·38	342 22 36·23	35·85
5	— 0·50	26 59 03·30	02·80
6	— 1·07	66 26 49·17	48·10
7	— 0·05	246 26 49·30	49·25
8	— 0·05	319 25 45·14	45·09
9	— 0·82	1 49 55·70	54·88
10	+ 0·43	181 49 58·04	58·47
11	+ 0·50	206 59 07·71	08·21
12	0	284 33 22·57	22·57

III. Praktische Bemerkungen.

Im Kapitel I, *c* wurde hervorgehoben, daß in unserem Viereck bei der neuen Methode die absoluten Glieder der Richtungsgleichungen entweder Null oder jenen gleich sind, die auch schon in den Winkelgleichungen der üblichen Methode auftreten. Diese Beziehung kann dazu benützt werden, die Richtungsgleichungen ohne Kenntnis der Ordinatenkonvergenzen sofort anzuschreiben.

In dem durchgerechneten Viereck sind die Verbesserungen der von der ersten Beobachtungsstation ausgehenden Richtungen jenen ihrer Gegenrichtungen gleichgesetzt, wodurch die ersten drei Richtungsgleichungen der Gruppe (4) mit den Absolutgliedern Null erhalten werden. Die drei anderen Richtungsgleichungen ergeben sich ohne weiteres aus den drei Winkelgleichungen (1), wenn man darin die in den

drei ersten Richtungsgleichungen vorkommenden, sich gegenseitig aufhebenden Verbesserungen einfach wegläßt.

Dieser Vorgang sei nun ausführlich an dem klassischen Fünfeck der hannover'schen Gradmessung [1] (Fig. 3) gezeigt, wobei des besseren Vergleiches wegen den neuen Bedingungs- und Normalgleichungen

Fig. 2.

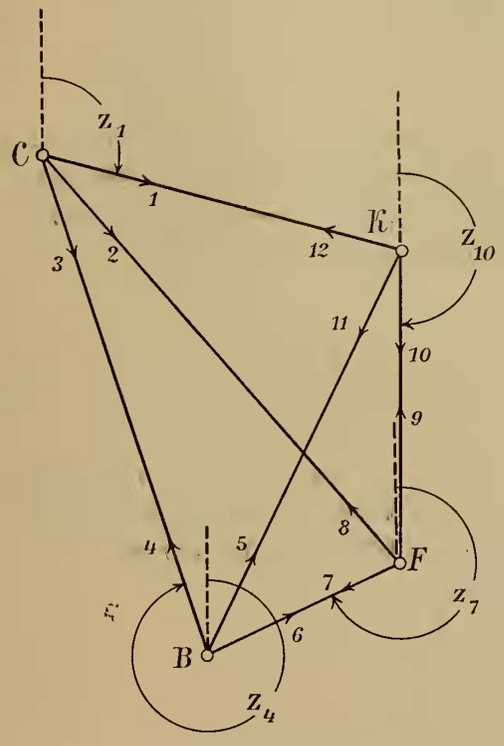
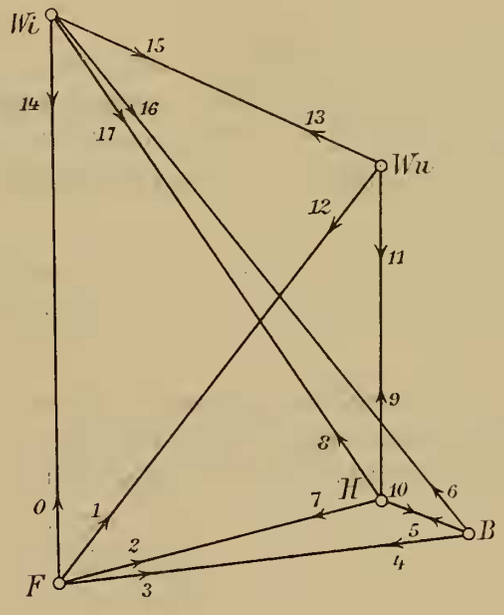


Fig. 3.



die von Gauss aufgestellten vorausgeschickt seien. Werden die den gemessenen Richtungen 0, 1, 2 . . . 17 zukommenden Verbesserungen mit (0), (1), (2) . . . (17) bezeichnet, so lauten die Gauss'schen Bedingungsgleichungen wie folgt:

Winkelgleichungen

$$\left.\begin{array}{lll}
1. & -(2)+(3)-(4)+(5)+(7)-(10)-1\cdot368=0 \\
2. & -(1)+(2)-(7)+(9)-(11)+(12)+1\cdot773=0 \\
3. & -(0)+(2)-(7)+(8)+(14)-(17)+1\cdot042=0 \\
4. & -(5)+(6)-(8)+(10)-(16)+(17)-0\cdot813=0 \\
5. & -(8)+(9)-(11)+(13)-(15)+(17)-0\cdot750=0
\end{array}\right\} \quad \ldots (a)$$

Seitengleichungen

$$\left.\begin{array}{lll}
6. & +4\cdot3\,(0)-153\cdot9\,(2)+149\cdot6\,(3)+39\cdot1\,(4)-79\cdot6\,(5)+40\cdot5\,(6)+31\cdot9\,(14) \\
 & \qquad +275\cdot4\,(16)-307\cdot3\,(17)+25\cdot0=0 \\
7. & +4\cdot3\,(0)-24\cdot2\,(1)+19\cdot9\,(2)+36\cdot1\,(11)-28\cdot6\,(12)-7\cdot5\,(13)+31\cdot9\,(14) \\
 & \qquad +29\cdot1\,(15)-61\cdot0\,(17)-3\cdot0=0
\end{array}\right\} \quad \ldots (b)$$

[1] Gauss: »Supplem. theor. comb. etc.« 1826. Werke, Bd. IV, p. 87 bis 92.
Wellisch: »Theorie und Praxis der Ausgleichungsrechnung,« Bd. II, p. 150 bis 154.

Die Koeffizienten der Normalgleichungen sind (I):

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	w
+60000	−20000	−20000	−20000	. . . .	+ 18480	− 1990	−136·8
	+60000	+20000	. . . .	+20000	− 15390	− 2060	+177·3
		+60000	−20000	−20000	+ 18100	+10850	+104·2
			+60000	+20000	− 46260	− 6100	− 81·3
				+60000	− 30730	−13370	− 75·0
					+226884	+16719	+ 25·0
						+ 8763	− 3·0

Bei dem neuen Verfahren erfolgt die Aufstellung der Bedingungs- und Normalgleichungen nach folgenden Gesichtspunkten. Die Verbesserungen der von der Station Wilsede = *Wi* ausgehenden vier Richtungen 14, 15, 16, 17 werden jenen der Gegenrichtungen 0, 13, 6, 8 gleichgesetzt, wodurch die ersten vier Richtungsgleichungen mit den Absolutgliedern Null erhalten werden, nämlich

$$\left.\begin{aligned} (14)-(0) &= 0 \\ (15)-(13) &= 0 \\ (16)-(6) &= 0 \\ (17)-(8) &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (c)$$

Indem, diesen Beziehungen entsprechend, in der dritten, vierten und fünften Winkelgleichung (14) gegen (0), (15) gegen (13), (16) gegen (6) und (17) gegen (8) gekürzt wird, ergeben sich sofort die weiteren Richtungsgleichungen mit den Absolutgliedern der letzten drei Winkelgleichungen von (*a*)

$$\left.\begin{aligned} (2) - (7) + 1{\cdot}042 &= 0 \\ (10) - (5) - 0{\cdot}813 &= 0 \\ (9) - (11) - 0{\cdot}750 &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (d)$$

und hierauf durch Substitution von $(7) = (2) + 1{\cdot}042$, $(10) = (5) + 0{\cdot}813$ und $(11) = (9) - 0{\cdot}750$ in die beiden ersten Winkelgleichungen von (*a*) die restlichen Richtungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} (3) - (4) - 1{\cdot}139 &= 0 \\ (12) - (1) + 1{\cdot}481 &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (e)$$

Nimmt man bei der Umformung der Seitengleichungen (*b*) auf die Richtungsgleichungen (*c*), (*d*) und (*e*) Rücksicht, so resultieren folgende verkürzte Seitengleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &36{\cdot}2\,(0) - 153{\cdot}9\,(2) + 188{\cdot}7\,(3) - 79{\cdot}6\,(5) + 315{\cdot}9\,(6) - 307{\cdot}3\,(8) - 19{\cdot}5 = 0 \\ &36{\cdot}2\,(0) - 52{\cdot}8\,(1) + 19{\cdot}9\,(2) - 61{\cdot}0\,(8) + 36{\cdot}1\,(9) + 21{\cdot}6\,(13) + 12{\cdot}3 = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (f)$$

und die Koeffizienten der Normalgleichungen (II):

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	w
20000	. . . . .								− 3620	− 3620	. . .
	20000	. . . . .							. . .	− 2160	. . .
		20000	. . . . .						− 31590	. . .	. . .
			20000	. . . . .					+ 30730	+ 6100	. . .
				20000	. . . . .				− 15390	+ 1990	+104·2
					20000	. . . . .			+ 7960	. . .	− 81·3
						20000	. . . . .		. . .	+ 3610	− 75·0
							20000	. . .	+ 18870	. . .	−113·9
								20000	. . .	+ 5280	+148·1
									261166	+16993	− 19·5
										9985	+ 12·3

An Stelle der 5 Winkelgleichungen (*a*) mit je 6 und der 2 Seitengleichungen (*b*) mit je 9 Unbekannten treten also bei Anwendung der neuen Methode 9 Richtungsgleichungen mit je 2 und 2 Seitengleichungen mit je 6 Unbekannten. Die anstatt der 7 Normalgleichungen (I) entstehenden 11 Normalgleichungen (II) sind zwar in größerer Anzahl, aber von weit einfacherer Form, was in der Rechenpraxis ausschlaggebend ist. Diese 11 Normalgleichungen lassen sich nämlich sehr leicht auf 5 Gleichungen reduzieren, wenn man die aus der 2., 3., 6., 7., 8. und 9. Normalgleichung ohne weiteres anschreibbaren Ansätze

$$\begin{aligned} k_2 &= +0\cdot1080\,k_{11} \\ k_3 &= +1\cdot5795\,k_{10} \\ k_6 &= -0\cdot3980\,k_{10}+0\cdot00407 \\ k_7 &= -0\cdot1805\,k_{11}+0\cdot00375 \\ k_8 &= -0\cdot9435\,k_{10}+0\cdot00570 \\ k_9 &= -0\cdot2640\,k_{11}-0\cdot00740 \end{aligned}$$

in die übrigen Normalgleichungen substituiert, wodurch sechs Korrelaten verschwinden und sofort die fünf bedeutend reduzierten Normalgleichungen

k_1	k_4	k_5	k_{10}	k_{11}	w
20000	. . . . .	—	3620	— 3620	. . . = 0
	20000	. . .	+ 30730	+ 6100	. . . = 0
		20000	— 15390	+ 1990	+104·2 = 0
			190298	+16993	+120·5 = 0
				7706	— 45·1 = 0

entstehen, welche wesentlich einfacher und müheloser aufgelöst werden können, als die sieben Normalgleichungen (I) des altgebräuchlichen Verfahrens, was der Praktiker beim bloßen Anblick erkennt. Wendet man nämlich auf das System der 5 Normalgleichungen das Verfahren von Schleiermacher an, indem man die aus den drei ersten dieser Gleichungen hervorgehenden Ansätze

$$\begin{aligned} k_1 &= +0\cdot1810\,k_{10}+0\cdot1810\,k_{11} \\ k_4 &= -1\cdot5365\,k_{10}-0\cdot3050\,k_{11} \\ k_5 &= +0\cdot7695\,k_{10}-0\cdot0995\,k_{11}-0\cdot00521 \end{aligned}$$

in die beiden letzten Gleichungen einsetzt, so erhält man schließlich ein System von bloß zwei Gleichungen, welche den Bau von Normalgleichungen aufweisen; sie lauten:

$$\begin{aligned} 140\,584\,k_{10}+8496\,k_{11}+200\cdot7 &= 0 \\ 8\,496\,k_{10}+1992\,k_{11}-55\cdot5 &= 0. \end{aligned}$$

Die weitere Rechnung nimmt den normalen Gang.

Bemerkt sei noch, daß die Absolutglieder der ersten Gleichungsgruppe (*c*) nicht unbedingt Null sein müssen.

IV. Positionsbestimmung des Stephansturmes.

Für das Gebiet der Stadt Wien samt Umgebung kommen die für die Zwecke der internationalen Gradmessung bestimmten trigonometrischen Punkte erster Ordnung: »Hermannskogel«, »Hundsheimer« und »Anninger« als Hauptdreieckspunkte in erster Linie in Betracht, da das ganze Stadtgebiet innerhalb des von diesen Punkten gebildeten Dreiecks gelegen ist. Den vom k. u. k. Militärgeographischen Institute herausgegebenen »Ergebnissen der Triangulierungen«, 1. Band 1901, entnehmen wir:

1. Die geographischen Koordinaten der drei Fundamentalpunkte.

	Breite	Länge von Ferro
Hermannskogel	48° 16' 15″2900	33° 57' 41″0600
Hundsheimer	48 07 57·6364	34 36 24·0265
Anninger	48 02 52·7203	33 54 49·5000

2. Die Azimute der Dreiecksseiten von Nord über Ost.

Von Hermannskogel nach Hundsheimer	107° 31' 41″700
» Hermannskogel » Anninger	188 09 25·077
» Hundsheimer » Anninger	259 55 05·159
» Hundsheimer » Hermannskogel	288 00 33·472
» Anninger » Hermannskogel	8 07 17·264
» Anninger » Hundsheimer	79 24 08·726

3. Die Logarithmen der Längen der Dreiecksseiten.

log (Hermannskogel—Hundsheimer)	= 4·702 1012, 8
log (Hermannskogel—Anninger)	= 4·398 6072, 2
log (Hundsheimer—Anninger)	= 4·719 8689, 4.

4. Die Dreieckswinkel.

Dreieckspunkt	Beobachtete Winkel	Korrektionen aus der Netzausgleichung	Sphärischer Exzeß	Ausgeglichene Winkel des ebenen Dreiecks
Hermannskogel	42″92	+ 0″457	1″051	80° 37' 42″326
Hundsheimer	28·26	+ 0·053	1·050	28 05 27·263
Anninger	50·21	+ 1·252	1·051	71 16 50·411
Summen	1·39	+ 1·767	3·152	180 00 00·000

Für die Positionsbestimmung der Spitze des Stephansturmes aus den geographischen Koordinaten der genannten drei Fundamentalpunkte erscheint es von Vorteil, zugleich mit dieser Bestimmung die Festlegung des Punktes »Andreasberg« bei Rauchenwart östlich von Himberg zu verbinden, während es sich für die Stationsausgleichung empfiehlt, überdies noch die nach dem Punkte zweiter Ordnung »Kirche Ober-Siebenbrunn« im Marchfelde angestellten Richtungsmessungen einzubeziehen. Dieser Rechnungsplan lag — nach einer freundlichen Mitteilung des ehemaligen Direktors des Triangulierungs- und Kalkülbureaus,

Herrn Hofrat A. Broch — der Bestimmung der Koordinaten des Stephansturmes für die fünfte Auflage der Theodolitinstruktion vom Jahre 1904 zugrunde und soll auch bei der Neuberechnung nach der hier dargestellten Methode beibehalten werden. Das hiebei benutzte Beobachtungsmaterial wurde den Serien geodätischer Messungen des Militärgeographischen Institutes aus den Jahren 1857 bis 1859 und 1867 bis 1876, sowie den Beobachtungen der Katastertriangulierung aus dem Jahre 1867 entnommen, wobei die zu St. Stephan gehörigen Beobachtungsdaten mittels der in den »Mitteilungen des k. u. k. Militärgeographischen Institutes«, 10. Band, 1891, enthaltenen Ergebnisse auf die Beobachtungsserie der Periode 1857 bis 1859 reduziert wurden.

Die zugrunde gelegten Beobachtungen mit den Resultaten der Stationsausgleichung sind:

1. Auf der Station Hermannskogel.

Epoche der Beobachtungen	Anninger *o*	Ober-Siebenbrunn *A*	Hundsheimer *B*	Stephansturm *C*	Andreasberg *D*
Mil.-Triang. 1857—1859 .	0° 0' 0"	262° 45' 28"46	—	311° 17' 43"63	316° 39' 57"09
Mil.-Triang. 1867—1876 .	0 0 0	—	279° 22' 17"08	311 17 43·34	316 39 56·69
Kat.-Triang. 1867	0 0 0	—	—	311 17 45·27	—

Normalgleichungen.

$$3A. .-C- D-14\cdot660=0$$
$$3B-C- D-11\cdot208=0$$
$$8C-2D- 2\cdot132=0$$
$$6D-18\cdot828=0.$$

Stationsausgleichung.

	Annahme	Verbesserungen	Ausgegl. Richtungen
Anninger	0° 00' 00"		0° 00' 00"
Ober-Siebenbrunn .	262 45 20	+8"642	262 45 28·642
Hundsheimer . . .	279 22 10	+7·491	279 22 17·491
Stephansturm . . .	311 17 40	+4·079	311 17 44·079
Andreasberg . . .	316 39 50	+7·187	316 39 57·187.

2. Auf der Station Anninger.

Epoche der Beobachtungen	Hermannskogel *o*	Stephansturm *A*	Andreasberg *B*	Hundsheimer *C*
Mil.-Triang. 1857—1859 .	—	0° 00' 00"	50° 36' 53"61	—
Mil.-Triang. 1867—1876 .	0° 0' 0"	19 44 00·76	70 20 52·08	71° 16' 50"21
Kat.-Triang. 1867	0 0 0	19 43 59·26	70 20 54·00	—

Normalgleichungen.

$$23A-13B-3C+14\cdot608=0$$
$$23B-3C-72\cdot432=0$$
$$9C+6\cdot624=0.$$

Stationsausgleichung.

	Annahme	Verbesserungen	Ausgegl. Richtungen
Hermannskogel . .	0° 00' 00"		0° 00' 00"
Stephansturm . . .	19 44 00	—0"150	19 43 59·850
Andreasberg . . .	70 20 50	+3·101	70 20 53·101
Hundsheimer . . .	71 16 50	+0·281	71 16 50·281.

3. Auf der Station Andreasberg.

Epoche der Beobachtungen	Anninger *o*	Hermannskogel *A*	Stephansturm *B*	Ober-Siebenbrunn *C*	Hundsheimer *D*
Mil.-Triang. 1857—1859 .	0° 0' 0"	66° 19' 04"59	69° 14' 05"27	139° 14' 54"46	181° 27' 06"86
Mil.-Triang. 1867—1876 .	0 0 0	66 19 04·72	—	—	—
Kat.-Triang. 1867	—	—	0 00 00	70 00 49·43	112 13 07·43

Normalgleichungen.

$$19{\cdot}5\,A - 3\,B - 3\,C - 3\,D - 40{\cdot}710 = 0$$
$$22\,B - 8\,C - 8\,D + 18{\cdot}795 = 0$$
$$22\,C - 8\,D + 39{\cdot}495 = 0$$
$$+22\,D - 116{\cdot}505 = 0.$$

Stationsausgleichung.

	Annahme	Verbesserungen	Ausgegl. Richtungen
Anninger	0° 00' 00"		0° 00' 00"
Hermannskogel . .	66 19 00	+4"655	66 19 04·655
Stephansturm . . .	69 14 00	+4·288	69 14 04·288
Ober-Siebenbrunn	139 14 50	+3·598	139 14 53·598
Hundsheimer . . .	181 27 00	+8·798	181 27 08·798.

4. Auf der Station Stephansturm.

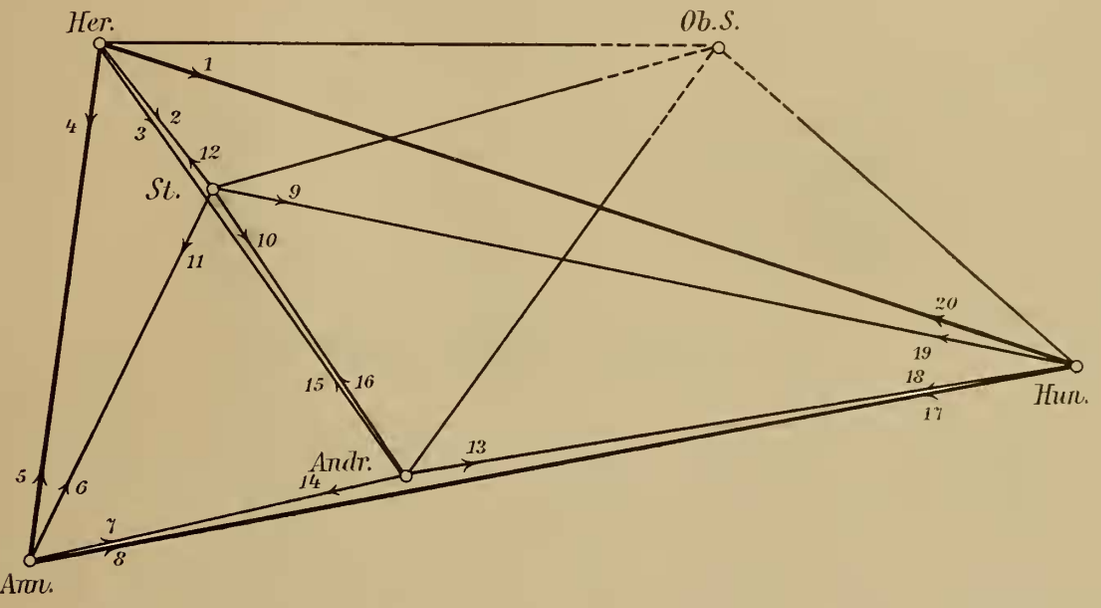
Epoche der Beobachtungen	Anninger	Hermannskogel	Ober-Siebenbrunn	Hundsheimer	Andreasberg
Mil.-Triang. 1857—1859 .	0° 0' 0"	111° 33' 44"98	227° 37' 39"74	253° 12' 26"43	299° 50' 58"33

5. Auf der Station Hundsheimer.

Epoche der Beobachtungen	Anninger	Hermannskogel
Mil.-Triang. 1867—1876 .	0° 0' 0"	28° 05' 28"26

Die Ergebnisse der Stationsausgleichung sind mit Bezug auf die in dem Netzbilde (Fig. 4) eingeschriebenen Richtungsnummern in der 2. Spalte der Tabelle IX, welche konform der Tabelle III auf-

Fig. 4.



gestellt ist, nochmals zusammengeschrieben. In der 3. Spalte sind diese Richtungen nach dem Meridian von St. Stephan vorläufig orientiert, indem die Richtung Nr. 12 mit 319° 30' 42″5 zum Ausgang

Tabelle IX.

Richtungs-Nr.	Ergebnisse der Stationsausgleichung	Vorläufig orientierte Richtungen	$\Delta\alpha$	Δa	$\Delta a - \Delta\alpha$
1	2	3	4	5	6
1	279° 22' 17″491	107° 35' 16″015	− 1″540	− 1″540	0
2	311 17 44·079	139 30 42·603	+ 0·103	+ 0·103	0
3	316 39 57·187	144 52 55·711	− 0·160	− 0·160	0
4	0 00 00·000	188 12 58·524	+ 0·966	+ 0·966	0
5	0 00 00·000	8 12 57·558	− 0·966	− 0·966	0
6	19 43 59·850	27 56 57·408	− 0·112	− 0·429	− 0″317
7	70 20 53·101	78 33 50·659	− 0·557	− 0·005	+ 0·552
8	71 16 50·281	79 29 47·839	+ 1·456	+ 0·664	+ 2·120
9	253 12 26·430	101 09 23·950	.	+ 1·051	.
10	299 50 58·330	147 47 55·850	+ 0·346	− 0·319	− 0·665
11	0 00 00·000	207 56 57·520	+ 0·112	+ 0·429	+ 0·317
12	111 33 44·980	319 30 42·500	− 0·103	− 0·103	0
13	181 27 08·798	80 01 00·014	.	+ 0·557	.
14	0 00 00·000	258 33 51·216	+ 0·557	+ 0·005	0·552
15	66 19 04·655	324 52 55·871	+ 0·160	+ 0·160	0
16	69 14 04·288	327 47 55·504	− 0·346	+ 0·319	+ 0·665
17	0 00 00·000	259 29 49·295	+ 1·456	+ 0·664	+ 2·120
20	28 05 28·260	287 35 17·555	+ 1·540	+ 1·540	0

genommen wurde. Hierauf folgen die Richtungsunterschiede $\Delta\alpha$, die Ordinatenkonvergenzen $\Delta\mathfrak{a}$ und die Differenzen $\Delta\mathfrak{a}-\Delta\alpha$. Die Ordinatenkonvergenzen wurden für

$$\varphi = 48^\circ\ 12'\ \text{und}\ \log\frac{\rho}{2r^2} = 1{\cdot}40379-10$$

aus den rechtwinkeligen Koordinaten y, x

Stephansturm I	$y = 0$	$x = 0$
Hermannskogel II . . .	− 5901	+ 6913
Anninger III	− 9481	−17864
Andreasberg IV . . .	+ 8906	−14147
Hundsheimer V . . .	+42145	− 9839

wie folgt erhalten:

$y_m + y_n$	$x_n - x_m$	m n	$\Delta\mathfrak{a}$
− 5901	+ 6913	I — II	− 0".103
− 9481	− 17864	I — III	+ 0·429
+ 8906	− 14147	I — IV	− 0·319
+ 42145	− 9839	I — V	− 1·051
− 15383	− 24777	II — III	+ 0·966
+ 3005	− 21060	II — IV	− 0·160
+ 36243	− 16753	II — V	− 1·540
− 576	+ 3717	III — IV	− 0·005
+ 32663	+ 8025	III — V	+ 0·664
+ 51051	+ 4307	IV — V	+ 0·557

Behufs Aufstellung der erforderlichen Bedingungsgleichungen sei festgestellt: In dem der Ausgleichung zu unterziehenden Netze gibt es $P = 5$ Punkte und $L = 10$ Verbindungslinien. Hievon sind, da der Punkt V nur vorwärts eingeschnitten betrachtet wird, $p = 4$ Punkte vor- und rückwärts eingeschnitten und $l = 8$ Richtungen gegenseitig, 2 Richtungen aber nur einseitig gemessen. Die Anzahl der Seitengleichungen beträgt sohin $S = L - 2P + 3 = 3$, die der Winkelgleichungen $W = l - p + 1 = 5$.

Die Bedingungsgleichungen sind:

A. Für die alt-gebräuchliche Methode.

a) Winkelgleichungen.

$-(2)+(4)-(5)+(6)-(11)+(12)+0{\cdot}318 = 0$	$\varepsilon = 0".433$
$-(6)+(7)-(10)+(11)-(14)+(16)-1{\cdot}534 = 0$	$\varepsilon = 0{\cdot}743$
$-(3)+(4)-(5)+(7)-(14)+(15)-0{\cdot}551 = 0$	$\varepsilon = 1{\cdot}120$
$-(1)+(4)\qquad\qquad -0{\cdot}868 = 0$	fester Winkel
$-(5)+(8)\qquad\qquad -1{\cdot}181 = 0$	fester Winkel

b) Seitengleichungen.

$$+0{\cdot}679707\,(1) - 0{\cdot}902869\,(3) + 0{\cdot}223162\,(4) + 0{\cdot}075188\,(5) - 36{\cdot}214138\,(7)$$
$$+36{\cdot}138950\,(8) - 23{\cdot}608299\,(13) + 23{\cdot}205050\,(14) + 0{\cdot}403249\,(15) - 67{\cdot}97618 = 0$$

$$+0{\cdot}184947\,(2) - 0{\cdot}223162\,(3) + 0{\cdot}038215\,(4) + 0{\cdot}120822\,(10) - 0{\cdot}037618\,(11)$$
$$- 0{\cdot}083204\,(12) + 0{\cdot}012512\,(14) - 0{\cdot}092347\,(15) + 0{\cdot}079835\,(16) - 0{\cdot}01106 = 0$$

$$+2{\cdot}205667\,(1) - 4{\cdot}445240\,(2) + 2{\cdot}239573\,(3) - 2{\cdot}412229\,(9) + 0{\cdot}544517\,(10)$$
$$+ 1{\cdot}867712\,(12) + 0{\cdot}458516\,(13) + 4{\cdot}130595\,(15) - 4{\cdot}589111\,(16) + 6{\cdot}00405 = 0$$

B. Für die neue Methode.

a') Richtungsgleichungen.

$$
\begin{aligned}
&\text{I} \ldots (2) - (12) &&= 0\\
&\text{II} \ldots (3) - (15) &&= 0\\
&\text{III} \ldots (4) - (5) &&= 0\\
&\text{IV} \ldots (6) - (11) + 0{\cdot}318 &&= 0\\
&\text{V} \ldots (7) - (14) - 0{\cdot}551 &&= 0\\
&\text{VI} \ldots (10) - (16) + 0{\cdot}665 &&= 0\\
&\text{VII} \ldots (4) - (1) - 0{\cdot}868 &&= 0\\
&\text{VIII} \ldots (8) - (5) - 1{\cdot}181 &&= 0
\end{aligned}
$$

b') Verkürzte Seitengleichungen.

$$\text{IX} \ldots + 37{\cdot}117007\,(1) - 0{\cdot}499620\,(3) - 13{\cdot}009088\,(7) - 23{\cdot}608299\,(13) - 6{\cdot}454487 = 0$$

$$\text{X} \ldots + 0{\cdot}101743\,(2) - 0{\cdot}315509\,(3) + 0{\cdot}038215\,(4) + 0{\cdot}200657\,(10) - 0{\cdot}037618\,(11) + 0{\cdot}012512\,(14) + 0{\cdot}042030 = 0$$

$$\text{XI} \ldots + 2{\cdot}205667\,(1) - 2{\cdot}577528\,(2) + 6{\cdot}370168\,(3) - 2{\cdot}412229\,(9) - 4{\cdot}044594\,(10) + 0{\cdot}458516\,(13) + 2{\cdot}952291 = 0$$

Die Weiterrechnung nach der neuen Methode nimmt folgenden Gang:

Koeffizienten der Bedingungsgleichungen.

Nr.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
1	.	.	.	.	.	.	− 1	.	+ 37·117007	.	+ 2·205667
2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 0·101743	− 2·577528
3	.	1	.	.	.	.	.	.	− 0·499620	− 0·315509	+ 6·370168
4	.	.	1	.	.	.	1	.	.	+ 0·038215	.
5	.	.	− 1	.	.	.	.	− 1	.	.	.
6	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
7	.	.	.	.	1	.	.	.	− 13·009088	.	.
8	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
9	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	− 2·412229
10	.	.	.	.	.	1	.	.	.	+ 0·200657	− 4·044594
11	.	.	.	− 1	.	.	.	.	.	− 0·037618	.
12	− 1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	.	.	.	.	.	.	.	.	− 23·608299	.	+ 0·458516
14	.	.	.	.	− 1	.	.	.	.	+ 0·012512	.
15	.	− 1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
16	.	.	.	.	.	− 1	.	.	.	.	.

Koeffizienten der Normalgleichungen.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	n'
2	.	.	.	.	.	.	.	.	+0·101743	− 2·577528	.
	2	.	.	.	.	.	.	− 0·499620	−0·315509	+ 6·370168	.
		2	.	.	.	1	1	.	+0·038215	.	.
			2	.	.	.	.	.	+0·037618	.	+0·318
				2	.	.	.	−13·009088	−0·012512	.	−0·551
					2	.	.	.	+0·200657	− 4·044594	+0·665
						2	.	−37·117007	+0·038215	− 2·205667	−0·868
							2	.	.	.	−1·181
								+2104·509981	+0·157635	+67·860311	−6·454487
									+0·153193	− 3·083667	+0·042030
										+74·475484	+2·952291

Korrelaten.

I = −0·082 936

II = +0·062 733

III = −1·571 285

IV = −0·068 200

V = +0·567 801

VI = −0·363 666

VII = +1·950 910

VIII = +1·376 142

IX = +0·049 581

X = −4·827 500

XI = −0·254 909

Verbesserungen.

(1) = −0″673	(5) = +0″195	(9) = +0·615	(13) = −1″287
(2) = +0·083	(6) = −0·068	(10) = −0·301	(14) = −0·628
(3) = −0·063	(7) = −0·077	(11) = +0·250	(15) = −0·063
(4) = +0·195	(8) = +1·376	(12) = +0·083	(16) = +0·364

Mittlerer Fehler einer beobachteten Richtung:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{r}} = \sqrt{\frac{5{\cdot}169199}{11}} = \pm 0''685.$$

Winkel im Dreieck »Hermannskogel—Stephansturm—Anninger».

		Beobachtete Winkel	Verbesserungen	Ausgegl. Winkel
Hermannskogel	4—2	= 48° 42' 15″921	+0″112	= 48° 42' 16″033
Stephansturm	12—11	= 111 33 44·980	−0·167	= 111 33 44·813
Anninger	6—5	= 19 43 59·850	−0·263	= 19 43 59·587
Summe .		180° 00' 00″751	−0″318	= 180° 00' 00″433

Sphärischer Exzeß $\varepsilon = 0''433$.

Winkel im ebenen Dreieck:

Hermannskogel . . = 48° 42' 15″889
Stephansthurm . . = 111 33 44·669
Anninger . . . . = 19 43 59·442.

Dreiecksseiten:

log (Hermannskogel—Anninger) . . = log S = 4·398 6072, 2
log (Hermannskogel—Stephansturm) = log s_1 = 3·958 5703, 7
log (Anninger—Stephansturm) . . = log s_2 = 4·305 9379·8.

Azimute:

Hermannskogel—Stephansturm α_1 = 139° 27' 09″044
Anninger—Stephansturm . . α_2 = 27 51 16·851.

Die Übertragung der geographischen Koordinaten und des Azimuts von dem Punkte »Hermannskogel« nach dem Punkte »St. Stephansturm« vermittelst der geodätischen Linie s_1 und ihres Azimutes α_1 geschieht nach O. Börsch: »Anleitung zur Berechnung geodätischer Koordinaten», 1885, § 24, wie folgt:

$\log s_1 = 3\cdot958\,57$
$\log \cos \alpha_1 = 9\cdot880\,74_n$
(7) $\varphi = 6\cdot556\,02$

$\log \frac{2}{3} b' = 0\cdot395\,33_n$
$\log \frac{3}{4} = 9\cdot875\,06$

$\log \frac{1}{2} b' = 0\cdot270\,39_n$
$\varphi + \frac{2}{3} b' = 48°\ 13'770$
$\varphi + \frac{1}{2} b' = 48°\ 14'391$

$\log s_1^2 = 7\cdot917\,14$
$\log \cos \alpha_1 = 9\cdot880\,74_n$
$\log \sin \alpha_1 = 9\cdot812\,97$
(3) $\varphi\varphi_1 f = 1\cdot403\,79$

$\log \varepsilon'' = 9\cdot01464_n$
$\varepsilon'' = -0''103$

$\log s_1 = 3\cdot9585703,7$
$\log \cos\left(\alpha_1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right) = 9\cdot8807379,9_n$
cpl. (1) $\varphi f = 8\cdot5102662.1$

$\log b'' = 2\cdot349\,5745,7_n$
$b'' = -223''6529$
$= -\ 3'\ 43''6529$
$\varphi = 48°\ 16'\ 15''2900$

$f = 48°\ 12'\ 31''6371$
$\log l^2 = 4\cdot913\,53$
(5) $f = 4\cdot082\,08$

$\log \psi'' = 8\cdot995\,61$
$-\psi'' = -\ 0''0990$
$f = 48°\ 12'\ 31''6371$

$\varphi_1 = 48°\ 12'\ 31''5381$

$\log s_1 = 3\cdot9585703,7$
$\log \sin\left(\alpha_1 - \frac{1}{3}\varepsilon\right) = 9\cdot8129654,4$
cpl. (2) $f = 8\cdot5089745,2$

$\log p'' = 2\cdot280\,5103,3$
cpl. $\log \cos f = 0\cdot176\,2531,9$
$\tau_p'' - \tau_l'' = -1,5$

$\log l'' = 2\cdot456\,7633,7$
$l = 4'\ 46''2618$
$\lambda = 33°\ 57'\ 41''0600$

$\lambda_1 = 34°\ 02'\ 27''3218$
$\gamma'' = 213''431$
$\gamma - \varepsilon = 3'\ 33''531$
$180 + \alpha_1 = 319°\ 27'\ 09''044$

$\alpha_1' = 319°\ 30'\ 12''578$

Die Übertragung der geographischen Koordinaten und des Azimutes von dem Punkte »Anninger« liefert die Ergebnisse:

$\varphi_2 = 48° 12' 31''5380,$ $\lambda_2 = 34° 02' 27''3217,$ $\alpha_2' = 207° 56' 57''765$

Rechnet man diese Elemente nach dem altgebräuchlichen Verfahren auf dieselbe Anzahl von Dezimalstellen, so erhält man im Vergleiche mit den Ergebnissen der neuen Methode folgendes:

Nach der	Breite φ	Länge λ	Logarithmus der Entfernung von der Spitze des Stephansturmes nach	
			Hermannskogel	Anninger
Alten Methode	48° 12' 31''5375	34° 02' 27''3227	3·958 5716, 0	4·305 9378, 6
Neuen Methode	48 12 31·5380	34 02 27·3217	3·958 5703, 7	4·305 9379, 8
Differenz . .	+ 0''0005	− 0''0010	− 12·3	+ 1, 2

Nach der	Azimut der Richtung nach Stephansturm von		Azimut der Richtung von Stephansturm nach	
	Hermannskogel	Anninger	Hermannskogel	Anninger
Alten Methode	139° 27' 08''946	27° 51' 17''120	319° 30' 42''480	207° 56' 58''035
Neuen Methode	139 27 09·044	27 51 16·851	319 30 42·578	207 56 57·765
Differenz . .	+ 0''098	− 0''269	+ 0''098	− 0''270

Zum Schlusse seien die geographischen Koordinaten der Spitze des Stephansturmes, wie sie seit dem Anfange des vorigen Jahrhunderts in verschiedenen Karten und Büchern angegeben werden, übersichtlich zusammengestellt:

	φ	λ
1804. »Monatliche Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde«	48° 12' 34''0	34° 02' 16''5
1810. »Instruktion für die im Kalkülbureau der k. k. österreichischen Landesvermessung angestellten Herren Offiziere« und auf der ältesten Spezialkarte der Monarchie«	48° 12' 34''0	34° 02' 15''0
1821. »Annalen der k. k. Sternwarte in Wien«, beziehungsweise »Beiträge zur Landeskunde Österreichs unter der Enns« (1834)	48° 12' 33''0	34° 02' 18''0
1828. »Neueste Europäische Münz-, Maß- und Gewichtskunde« von Josef Jäckel, und auf der Generalkarte von Tirol und Vorarlberg (1831)	48° 12' 32''00	34° 02' 16''28
1842. Generalkarte von Steiermark	48° 12' 31''	34° 02' 25''

		φ	λ
1845.	»Instruktion für die bei der astronomisch-trigonometrischen Landesvermessung und im Kalkülbureau des k. k. Milltärgeographischen Institutes angestellten Individuen« und auf der Spezialkarte von Böhmen .	48° 12' 33"36	34° 02' 22"50
1861.	Spezialkarte von Dalmatien	48° 12' 32"75	34° 02' 21"60
1890.	»Mitteilungen des k. u. k. Militärgeographischen Institutes«	48° 12' 34"742	34° 02' 25"648
1904.	»Instruktion zur Ausführung der trig. u. polyg. Vermessungen behufs Herstellung neuer Pläne für die Zwecke des Grundsteuerkatasters«, 5. Auflage . . .	48° 12' 31"54	34° 02' 27"32
1914.	Vorliegende Neuberechnung	48° 12' 31"538	34° 02' 27"322